**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Логические исчисления

Logical Calculi

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 4

Регистрационный номер рабочей программы: 050632

Санкт-Петербург

2019

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

1. **Цели и задачи учебных занятий**

Сообщение сведений о логических исчислениях в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов теории логических исчислений.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Владение курсом «Основы наивной теории множеств».

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов:

— классическая пропозициональная логика (PCL) и её семантика;

— исчисления для PCL;

— классическая логика первого порядка (FOCL) и её семантика;

— исчисления для FOCL;

— интуиционистская пропозициональная логика (PIL).

Дисциплина участвует в формировании компетенций обучающихся по образовательной программе, установленных учебным планом для данной дисциплины.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Лекции 32 часа, практические занятия 30 часов, зачет 2 часа.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 4 | 32 |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 48 |  | 30 |  | 34 | 4 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  |  |  |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 32 |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 48 |  | 30 |  |  | 4 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| очная форма обучения | | | | | | |
| Семестр 4 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| 1 | Классическая пропозициональная логика (PCL) и её семантика | Лекции | 4 |
| практические занятия | 4 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 10 |
| 2 | Исчисления для PCL | Лекции | 6 |
| практические занятия | 6 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 16 |
| 3 | Классическая логика первого порядка (FOCL) и её семантика | Лекции | 4 |
| практические занятия | 4 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 16 |
| 4 | Исчисления для FOCL | Лекции | 12 |
| практические занятия | 12 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 22 |
| 5 | Интуиционистская пропозициональная логика (PIL) | Лекции | 6 |
| практические занятия | 4 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 20 |
| 6 | Экзамен | промежуточная аттестация (ауд) | 2 |
| промежуточная аттестация (с.р.) | 30 |

**Раздел 1:** *Пропозициональная классическая логика (PCL) и её семантика*

1. Язык пропозициональной классической логики PCL. Формулы PCL (и их подформулы). Двухзначная оценочная семантика для PCL. Выполнимость и общезначимость PCL-формул. Семантическое следование и семантическая эквивалентность в PCL, их связь с выполнимостью и общезначимостью. Основные эквивалентности в PCL. Теорема о подстановке вместо выделенной пропозициональной переменной в общезначимую PCL-формулу, а также теорема о сохранении семантической эквивалентности при такого рода подстановках. Теорема о замене подформулы на эквивалентную в PCL. Семантическая версия алгебры Линденбаума–Тарского для PCL.

**Раздел 2:** *Исчисления для PCL*

1. Гильбертовское исчисление для PCL и выводимость в нём. Простейшие свойства этой выводимости. Простые примеры выводимых формул в гильбертовском PCL-исчислении: коммутативность дизъюнкции и конъюнкции. Допустимые и производные правила вывода в PCL. Некоторые полезные примеры такого рода правил. Теорема о корректности гильбертовского PCL-исчисления. Теорема о дедукции для гильбертовского PCL-исчисления.

2. Обобщённая теорема дедукции для исчислений в языке PCL. Варианты гильбертовского исчисления для PCL, основанные на различных версиях аксиом для отрицания, а также доказательство их эквивалентности. Предложение о том, что у пропозициональной классической логики (как множества всех общезначимых PCL-формул) нет собственных нетривиальных расширений, и предложение о том, что в пропозициональной классической логике каждое допустимое правило вывода является производным.

3. Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые множества PCL-формул и их основные свойства. Полные множества PCL-формул и их связь с максимальными непротиворечивыми множествами PCL-формул. Доказательство теоремы Линденбаума с помощью леммы Цорна.

4. Прямое доказательство теоремы Линденбаума (без использования леммы Цорна). Теорема о сильной полноте гильбертовского PCL-исчисления и её важнейшие следствия, включая теорему компактности для PCL. Алгебры Линденбаума–Тарского для PCL (синтаксическая версия). Теоретико-множественная и алгебраическая семантики для PCL. Формулировка теоремы о сильной полноте гильбертовского PCL-исчисления относительно этих альтернативных семантик (без доказательства).

5. Единственность дополнений в булевых алгебрах и основные тождества булевых алгебр. Доказательство теоремы о сильной полноте гильбертовского PCL-исчисления относительно теоретико-множественной и алгебраической семантик.

6. Исчисление естественной дедукции для PCL и выводимость в нём. Простейшие свойства этой выводимости. Тривиализация теорема о дедукции для PCL-исчисления естественной дедукции. Примеры выводимых формул в PCL-исчислении естественной дедукции: коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции, дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции и наоборот, а также законы де Моргана.

7. Вывод всех аксиом гильбертовского PCL-исчисления и их вариантов в исчислении естественной дедукции для PCL. Теорема о сильной полноте PCL-исчисления естественной дедукции.

**Раздел 3:** *Классическая логика первого порядка (FOCL) и её семантика*

1. Язык классической логики первого порядка FOCL. Термы и формулы FOCL. Семантика (по Тарскому) для FOCL. Определимость предикатов и функций в структурах. Пример с определением четырёхместного предиката параллельности в обеднении стандартной модели элементарной геометрии, не содержащем предиката соразмерности, и соответствующая формулировка аксиомы о параллельных. Конечные спектры FOCL-предложений в сигнатурах с равенством. Примеры доказательства того, что то или иное множество является спектром: множество всех квадратов натуральных чисел, множество всех степеней простых чисел и множество всех простых чисел.

2. Гомоморфизмы, вложения и изоморфизмы между структурами. Предложение о сохранении истинностного значения FOCL-формулы при изоморфизме. Автоморфизмы между структурами. Метод доказательства неопределимости с помощью автоморфизмов и простейшие примеры его применения. Описание класса всех автоморфизмов для стандартной модели элементарной геометрии и её обеднения, не содержащего предиката соразмерности, а также сопутствующие следствия.

3. Выполнимость и общезначимость FOCL-формул. Семантическое следование и семантическая эквивалентность в FOCL, их связь с выполнимостью и общезначимостью. Основные эквивалентности в FOCL. Теорема о подстановке в общезначимую FOCL-формулу. Лемма о переименовании связанной переменной. Теорема о замене подформулы на эквивалентную в FOCL.

4. Теории в FOCL (с равенством и без равенства). Модели и нормальные модели FOCL-теорий. Теорема о том, что если FOCL-теория с равенством имеет модель, то она имеет и нормальную модель. Конгруэнции. Описание конгруэнций групп и булевых алгебр с помощью соответственно нормальных подгрупп и идеалов.

**Раздел 4:** *Исчисления для FOCL*

1. Гильбертовское исчисление для FOCL и выводимость в нём. Простейшие свойства этой выводимости. Доказуемые, опровержимые и независимые FOCL-формулы для данной FOCL-теории. Теорема о тавтологии. Синтаксическое доказательство леммы о переименовании связанной переменной. Теорема о дедукции для гильбертовского FOCL-исчисления.

2. Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые (полные и непротиворечивые) множества FOCL-формул и их основные свойства. Теорема о корректности гильбертовского FOCL-исчисления и простейшие следствия из неё. Простые примеры применения этой теоремы для доказательства результатов о независимости.

3. Использования новых констант в доказательствах в гильбертовском FOCL-исчислении. Лемма о непротиворечивости расширения непротиворечивой FOCL-теории с помощью константы-свидетеля. Хенкиновские теории. Теорема Хенкина. Свойства хенкиновских теорий, связанные с кванторами существования и всеобщности.

4. Теорема о существовании модели (для теорий без равенства и с равенством). Теорема о сильной полноте гильбертовского FOCL-исчисления и важнейшие её следствия, включая теорему Гёделя–Мальцева о компактности для FOCL. Исчисление естественной дедукции для FOCL и теорема о полноте для него (без доказательства).

5. Аксиоматизируемость и конечная аксиоматизируемость классов структур в FOCL. Предложение о максимальной возможной аксиоматизации. Простой критерий конечной аксиоматизируемости. Примеры применения теоремы Гёделя–Мальцева для доказательства результатов о неаксиоматизируемости: конечная неаксиоматизируемость класса всех полные абелевы групп, неаксиоматизируемость класса всех периодических абелевых групп и конечная неаксиоматизируемость класса всех абелевых групп без кручения. Предложение о том, что предложение, истинное во всех полях нулевой характеристики, истинно также и во всех полях характеристики p для достаточно больших p (т.е. больших некоторого натурального числа, зависящего от выбора предложения).

6. Нестандартные модели FOCL-теории стандартной модели арифметики, их существование. Галактики для данной нестандартной модели такого рода и порядок на них. Общее строение порядка в данной нестандартной модели такого рода (как порядка внутри каждой из галактик, так и порядка на галактиках).

7. Подструктуры. Критерий того, что подмножество носителя данной структуры является носителем подструктуры этой структуры. Элементарная эквивалентность структур. Элементарные подструктуры. Предложение о том, что если FOCL-структура элементарно эквивалентна стандартной модели арифметики, то у неё есть элементарная подструктура, изоморфная стандартной модели арифметики. Теорема Лёвенгейма–Сколема «вниз» (для не более чем счётной сигнатуры с равенством) и простейшие следствия из неё.

8. Предложение о том, что если структура A (в сигнатуре с равенством) элементарно эквивалентна структуре B, в которой каждый элемент является значением некоторого замкнутого терма, то у A есть элементарная подструктура, изоморфная B. Теорема Лёвенгейма–Сколема «вверх» (для не более чем счётной сигнатуры с равенством) и простейшие следствие из неё.

9. Вычислимо/эффективно аксиоматизируемые и разрешимые FOCL-теории. Замечание о разрешимости полных вычислимо аксиоматизируемых FOCL-теорий. Замечание о том, что если у FOCL-теории есть вычислимо перечислимое множество аксиом, то она вычислимо аксиоматизируема. Примеры полных вычислимо аксиоматизируемых FOCL-теорий: теория плотных линейных порядков без концов (с доказательством), теория алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики (без доказательств), теория вещественно замкнутых упорядоченных полей (без доказательств). Примеры неполных и одновременно неразрешимых вычислимо аксиоматизируемых FOCL-теорий: арифметика Пеано (без доказательства) и теория множеств Цермело–Френкеля (без доказательства).

**Раздел 5:** *Пропозициональная интуиционистская логика (IPL)*

1. Гильбертовское исчисление для интуиционистской пропозициональной логики PIL. Шкалы Крипке и семантика возможных миров для PIL. Лемма о монотонности для PIL. Лемма о порождённой подмодели для PIL.

2. Теорема о корректности гильбертовского PIL-исчисления и сопутствующие результаты. Примеры формул, не выводимых в гильбертовском PIL-исчислении.

3. Лемма о расширении для PIL. Лемма о канонической модели для PIL. Теорема о сильной полноте гильбертовского PIL-исчисления.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Посещение лекций и практических занятий.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Основная и дополнительная литература.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

**Методика проведения зачёта**

Зачет проводится в устной форме. Для получения зачета необходимо решить 60% задач, предлагаемых в течение семестра. В случае, если к моменту проведения зачета студент решил меньшее количество задач, на зачете ему предлагаются задачи, аналогичные по тематике и сложности. Задачи даются в форме домашних заданий с устной сдачей («листочки»), письменных домашних заданий и контрольных. Темы задач фиксированы, количество и форма выдачи остается на усмотрение преподавателя практических занятий. Возможна выдача задач повышенной сложности, решение которых засчитывается в качестве индивидуальных достижений студента (при подаче заявок на именные стипендии, конкурсы и т.п.); сдача таких заданий проводится в устной форме.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

**Темы задач:**

1. Семантики для PCL (двухзначная оценочная, теоретико-множественная и алгебраическая).

2. Гильбертовское исчисление для PCL и теорема о сильной полноте для него.

3. Исчисление естественного вывода для PCL и теорема о сильной полноте для него.

4. Теорема о компактности для PCL.

5. Семантика (по Тарскому) для FOCL. Определимость предикатов и функций в структурах. Гомоморфизмы, вложения и изоморфизмы между структурами. Метод доказательства неопределимости с помощью автоморфизмов.

6. Конечные спектры FOCL-предложений в сигнатурах с равенством.

7. Гильбертовское исчисление для FOCL и теорема о сильной полноте для него.

8. Исчисление естественной дедукции для FOCL и теорема о сильной полноте для него.

9. Теорема Гёделя-Мальцева о компактности для FOCL. Аксиоматизируемость и конечная аксиоматизируемость.

11. Нестандартные модели арифметики.

11. Подструктуры и элементарные подструктуры данной структуры.

12. Теоремы Лёвенгейма–Сколема «вниз» и «вверх» (для счётной сигнатуры с равенством).

13. Гильбертовское исчисление для PIL и теорема о сильной полноте для него.

**Образцы типовых задач:**

1. Докажите, что в булевых алгебрах (определённых аксиоматически посредством тождеств) дополнения единственны.

2. Выведите закон контрапозиции (в обе стороны) в гильбертовском исчислении для PCL.

3. Выведите законы де Моргана в исчислении естественного вывода для PCL.

4. Обозначим через C трёхместное отношение на вещественной плоскости такое, что С(x,y,z) тогда и только тогда, когда длины отрезков xz и yz равны. Рассмотрим нормальную структуру вещественной плоскости с отношениями C и =. Найдите формулу, определяющую в этой структуре четырёхместное отношение D такое, что D(x,y,u,v) тогда и только тогда, когда длины отрезков xy и uv равны.

5. Для каждого из следующих условий найдите подходящее предложение F (некоторой конечной сигнатуры с равенством):

a) конечный спектр F равен множеству всех положительных целых чисел, делящихся на 3;

b) конечный спектр F равен множеству всех квадратов положительных целых чисел;

c) конечный спектр F равен множеству всех положительных степеней простых чисел;

d) конечный спектр F равен множеству всех простых чисел.

6. Докажите, что предложение сигнатуры, состоящей ровно из n+1 одноместного предикатного символа, выполнимо в некоторой структуре тогда и только тогда, когда оно выполнимо в некоторой структуре мощности не больше, чем 2 в степени n+1.

7. Выведите в гильбертовском исчислении для FOCL так называемые «правила отрицания кванторов» (представляющие собой эквивалентности, связанные с заменой квантора всеобщности на квантор существования и наоборот при внесении отрицания внутрь области действия соответствующего квантора).

8. Докажите, что в любой нестандартной модели полной арифметики первого порядка (т.е. в такой модели, которая не изоморфна стандартной) любой нестандартный элемент (т.е. не являющийся значением какого-либо нумерала) больше любого стандартного.

9. Докажите, что класс структур является конечно аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда этот класс и его дополнение оба являются аксиоматизируемыми.

10. Докажите, что класс всех полных абелевых групп не является конечно аксиоматизируемым.

11. Докажите, что класс всех периодических абелевых групп не является аксиоматизируемым.

12. Докажите, что пропозициональная интуиционистская логика обладает дизъюнктивным свойством (в отличие от классической).

**Список вопросов к экзамену:**

1. Язык пропозициональной классической логики PCL. Формулы PCL (и их подформулы). Двухзначная оценочная семантика для PCL. Выполнимость и общезначимость PCL-формул. Семантическое следование и семантическая эквивалентность в PCL, их связь с выполнимостью и общезначимостью. Основные эквивалентности в PCL. Теорема о подстановке вместо выделенной пропозициональной переменной в общезначимую PCL-формулу, а также теорема о сохранении семантической эквивалентности при такого рода подстановках. Теорема о замене подформулы на эквивалентную в PCL. Семантическая версия алгебры Линденбаума–Тарского для PCL.

2. Гильбертовское исчисление для PCL и выводимость в нём. Простейшие свойства этой выводимости. Простые примеры выводимых формул в гильбертовском PCL-исчислении: коммутативность дизъюнкции и конъюнкции. Допустимые и производные правила вывода в PCL. Некоторые полезные примеры такого рода правил. Теорема о корректности гильбертовского PCL-исчисления. Теорема о дедукции для гильбертовского PCL-исчисления.

3. Обобщённая теорема дедукции для исчислений в языке PCL. Варианты гильбертовского исчисления для PCL, основанные на различных версиях аксиом для отрицания, а также доказательство их эквивалентности. Предложение о том, что у пропозициональной классической логики (как множества всех общезначимых PCL-формул) нет собственных нетривиальных расширений, и предложение о том, что в пропозициональной классической логике каждое допустимое правило вывода является производным.

4. Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые множества PCL-формул и их основные свойства. Полные множества PCL-формул и их связь с максимальными непротиворечивыми множествами PCL-формул. Доказательство теоремы Линденбаума с помощью леммы Цорна.

5. Прямое доказательство теоремы Линденбаума (без использования леммы Цорна). Теорема о сильной полноте гильбертовского PCL-исчисления и её важнейшие следствия, включая теорему компактности для PCL. Алгебры Линденбаума–Тарского для PCL (синтаксическая версия). Теоретико-множественная и алгебраическая семантики для PCL. Формулировка теоремы о сильной полноте гильбертовского PCL-исчисления относительно этих альтернативных семантик (без доказательства).

6. Единственность дополнений в булевых алгебрах и основные тождества булевых алгебр. Доказательство теоремы о сильной полноте гильбертовского PCL-исчисления относительно теоретико-множественной и алгебраической семантик.

7. Исчисление естественной дедукции для PCL и выводимость в нём. Простейшие свойства этой выводимости. Тривиализация теорема о дедукции для PCL-исчисления естественной дедукции. Примеры выводимых формул в PCL-исчислении естественной дедукции: коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции, дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции и наоборот, а также законы де Моргана.

8. Вывод всех аксиом гильбертовского PCL-исчисления и их вариантов в исчислении естественной дедукции для PCL. Теорема о сильной полноте PCL-исчисления естественной дедукции.

9. Язык классической логики первого порядка FOCL. Термы и формулы FOCL. Семантика (по Тарскому) для FOCL. Определимость предикатов и функций в структурах. Пример с определением четырёхместного предиката параллельности в обеднении стандартной модели элементарной геометрии, не содержащем предиката соразмерности, и соответствующая формулировка аксиомы о параллельных. Конечные спектры FOCL-предложений в сигнатурах с равенством. Примеры доказательства того, что то или иное множество является спектром: множество всех квадратов натуральных чисел, множество всех степеней простых чисел и множество всех простых чисел.

10. Гомоморфизмы, вложения и изоморфизмы между структурами. Предложение о сохранении истинностного значения FOCL-формулы при изоморфизме. Автоморфизмы между структурами. Метод доказательства неопределимости с помощью автоморфизмов и простейшие примеры его применения. Описание класса всех автоморфизмов для стандартной модели элементарной геометрии и её обеднения, не содержащего предиката соразмерности, а также сопутствующие следствия.

11. Выполнимость и общезначимость FOCL-формул. Семантическое следование и семантическая эквивалентность в FOCL, их связь с выполнимостью и общезначимостью. Основные эквивалентности в FOCL. Теорема о подстановке в общезначимую FOCL-формулу. Лемма о переименовании связанной переменной. Теорема о замене подформулы на эквивалентную в FOCL.

12. Теории в FOCL (с равенством и без равенства). Модели и нормальные модели FOCL-теорий. Теорема о том, что если FOCL-теория с равенством имеет модель, то она имеет и нормальную модель. Конгруэнции. Описание конгруэнций групп и булевых алгебр с помощью соответственно нормальных подгрупп и идеалов.

13. Гильбертовское исчисление для FOCL и выводимость в нём. Простейшие свойства этой выводимости. Доказуемые, опровержимые и независимые FOCL-формулы для данной FOCL-теории. Теорема о тавтологии. Синтаксическое доказательство леммы о переименовании связанной переменной. Теорема о дедукции для гильбертовского FOCL-исчисления.

14. Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые (полные и непротиворечивые) множества FOCL-формул и их основные свойства. Теорема о корректности гильбертовского FOCL-исчисления и простейшие следствия из неё. Простые примеры применения этой теоремы для доказательства результатов о независимости.

15. Использования новых констант в доказательствах в гильбертовском FOCL-исчислении. Лемма о непротиворечивости расширения непротиворечивой FOCL-теории с помощью константы-свидетеля. Хенкиновские теории. Теорема Хенкина. Свойства хенкиновских теорий, связанные с кванторами существования и всеобщности.

16. Теорема о существовании модели (для теорий без равенства и с равенством). Теорема о сильной полноте гильбертовского FOCL-исчисления и важнейшие её следствия, включая теорему Гёделя–Мальцева о компактности для FOCL. Исчисление естественной дедукции для FOCL и теорема о полноте для него (без доказательства).

17. Аксиоматизируемость и конечная аксиоматизируемость классов структур в FOCL. Предложение о максимальной возможной аксиоматизации. Простой критерий конечной аксиоматизируемости. Примеры применения теоремы Гёделя–Мальцева для доказательства результатов о неаксиоматизируемости: конечная неаксиоматизируемость класса всех полные абелевы групп, неаксиоматизируемость класса всех периодических абелевых групп и конечная неаксиоматизируемость класса всех абелевых групп без кручения. Предложение о том, что предложение, истинное во всех полях нулевой характеристики, истинно также и во всех полях характеристики p для достаточно больших p (т.е. больших некоторого натурального числа, зависящего от выбора предложения).

18. Нестандартные модели FOCL-теории стандартной модели арифметики, их существование. Галактики для данной нестандартной модели такого рода и порядок на них. Общее строение порядка в данной нестандартной модели такого рода (как порядка внутри каждой из галактик, так и порядка на галактиках).

19. Подструктуры. Критерий того, что подмножество носителя данной структуры является носителем подструктуры этой структуры. Элементарная эквивалентность структур. Элементарные подструктуры. Предложение о том, что если FOCL-структура элементарно эквивалентна стандартной модели арифметики, то у неё есть элементарная подструктура, изоморфная стандартной модели арифметики. Теорема Лёвенгейма–Сколема «вниз» (для не более чем счётной сигнатуры с равенством) и простейшие следствия из неё.

20. Предложение о том, что если структура A (в сигнатуре с равенством) элементарно эквивалентна структуре B, в которой каждый элемент является значением некоторого замкнутого терма, то у A есть элементарная подструктура, изоморфная B. Теорема Лёвенгейма–Сколема «вверх» (для не более чем счётной сигнатуры с равенством) и простейшие следствие из неё.

21. Вычислимо/эффективно аксиоматизируемые и разрешимые FOCL-теории. Замечание о разрешимости полных вычислимо аксиоматизируемых FOCL-теорий. Замечание о том, что если у FOCL-теории есть вычислимо перечислимое множество аксиом, то она вычислимо аксиоматизируема. Примеры полных вычислимо аксиоматизируемых FOCL-теорий: теория плотных линейных порядков без концов (с доказательством), теория алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики (без доказательств), теория вещественно замкнутых упорядоченных полей (без доказательств). Примеры неполных и одновременно неразрешимых вычислимо аксиоматизируемых FOCL-теорий: арифметика Пеано (без доказательства) и теория множеств Цермело–Френкеля (без доказательства).

22. Гильбертовское исчисление для интуиционистской пропозициональной логики PIL. Шкалы Крипке и семантика возможных миров для PIL. Лемма о монотонности для PIL. Лемма о порождённой подмодели для PIL.

23. Теорема о корректности гильбертовского PIL-исчисления и сопутствующие результаты. Примеры формул, не выводимых в гильбертовском PIL-исчислении.

24. Лемма о расширении для PIL. Лемма о канонической модели для PIL. Теорема о сильной полноте гильбертовского PIL-исчисления.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Анкета для студентов для оценки качества преподавания курса.

Просим Вас заполнить анкету-отзыв по прочитанной дисциплине. Обобщенные данные анкет будут использованы для ее совершенствования. По каждому вопросу проставьте соответствующие оценки по шкале от 1 до 10 баллов (обведите выбранный Вами балл). В

случае необходимости впишите свои комментарии.

1. Насколько Вы удовлетворены содержанием дисциплины в

целом?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2. Насколько Вы удовлетворены общим стилем преподавания?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

3. Как Вы оцениваете качество подготовки предложенных

методических материалов?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

4. Насколько Вы удовлетворены использованием

преподавателями активных методов обучения?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

5. Какой из модулей (разделов) дисциплины Вы считаете наиболее полезным, ценным с точки зрения дальнейшего обучения и/или

применения в последующей практической деятельности?

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

6. Что бы Вы предложили изменить в методическом и

содержательном плане для совершенствования преподавания данной

дисциплины?

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

СПАСИБО!

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные стандартным оборудованием, используемым для обучения в СПбГУ в соответствии с требованиями материально-технического обеспечения.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное оборудование, используемое для обучения в СПбГУ. MS Windows, MS Office, Mozilla FireFox, Google Chrome, Acrobat Reader DC, WinZip, Антивирус Касперского.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Верещагин, Н.К., и Шень, А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2: Языки и исчисления — 4-е изд., испр. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 240 с.  
Электронная версия: http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf

2. Лавров, И.А., и Максимова, Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2004. — 256 с.

3. Клини, С.К. Введение в метаматематику / пер. с англ. А.С. Есенина–Вольпина; под ред. В.А. Успенского. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. — 527 с. *Переиздание*: Клини, С.К. Введение в метаматематику / пер. с англ. А.С. Есенина–Вольпина; под ред. В.А. Успенского. — 2-е изд, испр. — М.: Либроком, 2009. — 527 с.

4. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф.А. Кабакова; под ред. С.И. Адяна. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1984. — 319 с.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Верещагин, Н.К., и Шень, А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Начала теории множеств — 4-е изд., доп. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 112 с.  
Электронная версия: http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1-2.pdf

2. Кейслер, Г., и Чэн, Ч.Ч. Теория моделей / пер. с англ. С.С. Гончарова и др.; под ред. Ю.Л. Ершова и А.Д. Тайманова. — М.: Мир, 1977. — 614 с.

3. Успенский, В.А., Верещагин, Н.К., и Плиско, В.Е. Вводный курс математической логики. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 135 с.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

1. Ершов, Ю.Л., и Палютин, Е.А. Математическая логика. — 6-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2011. — 356 с.
2. Одинцов, С.П., Сперанский, С.О., и Дробышевич, С.А. Введение в неклассические логики. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2014. — 133 с. Электронная версия доступна по адресу http://math.nsc.ru/~spodintsov/textbook.pdf
3. Boolos, G.S., Burgess, J.P., and Jeffrey, R.C. Computability and Logic. — 5th ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — xiv + 350 p. *Пер. на русский 1-ого изд.*: Булос, Дж., и Джеффри, Р. Вычислимость и логика. Пер. с англ. — М.: Мир, 1994. — 396 с.
4. Chriswell, I., and Hodges, W. Mathematical Logic. — Oxford: Oxford University Press, 2007. — vi + 250 p.
5. Marker, D. Model theory: An Introduction. — New York: Springer, 2002. — viii + 342 p.
6. Priest, G. An Introduction to Non-Classical Logic: from If to Is. — 2nd ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2008. — xxxii + 613 p.
7. Сайт Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: http://www.librarv.spbu.ru/
8. Электронный каталог Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: http://www.librarv.spbu.ru/cgibin/irbis64r/cgiirbis 64.ехе?С21 COM=F&I21 DBN=IBIS&P21 DBN=IBIS
9. Перечень электронных ресурсов, находящихся в доступе СПбГУ: http://cufts.librarv.spbu.ru/CRDB/SPBGU/
10. Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?name=rures&resource tvpe=8

**Раздел 4. Разработчики программы**

Сперанский Станислав Олегович, кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургского государственного университета, s.o.speranski@spbu.ru